Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 3

9 de mayo de 2023

Zona A tarde | **Zona B** mañana | **Zona C** tarde

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

2223 – 7223

6 páginas

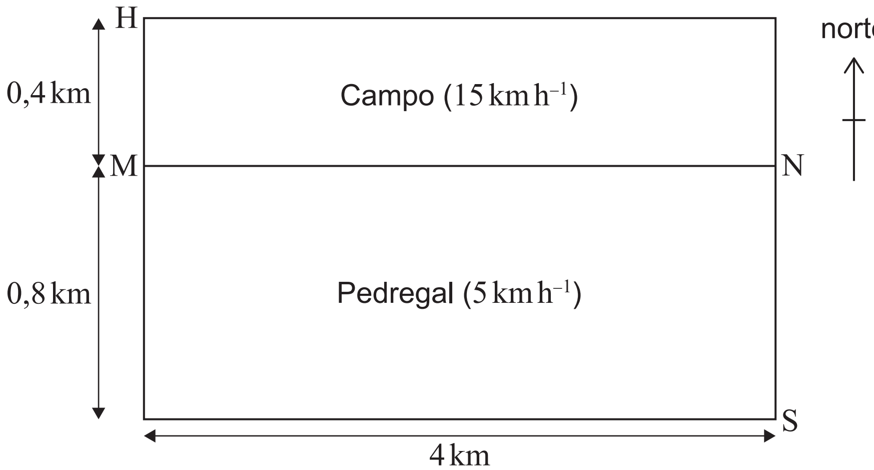
Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 26]

En esta pregunta se analiza la ruta óptima entre dos puntos separados por varias regiones y con distintas velocidades máximas.

Huw vive en una casa (H) y va al colegio (S); tanto H como S aparecen rotulados en la siguiente figura. El colegio está situado a $1{,}2\,\text{km}$ al sur y a $4\,\text{km}$ al este de la casa de Huw. Hay un límite [MN] que va de oeste a este y que está a $0{,}4\,\text{km}$ al sur de la casa. El terreno que está al norte de [MN] es un campo por el que Huw puede correr a 15 kilómetros por hora ($\text{km}\,\text{h}^{-1}$). El terreno que está al sur de [MN] es un pedregal por el que Huw camina a $5\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$. Las dos regiones se muestran en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Huw va en línea recta de H a S. Calcule el tiempo que tarda Huw en hacer este recorrido. Dé la respuesta redondeando al número entero de minutos más cercano. [6]

(b) Huw se da cuenta de que podría tardar menos tiempo si cogiera una ruta menos directa. Por ello, define un punto P que pertenece a [MN] y que está a x km al este de M. Huw decide ir corriendo de H a P y luego ir caminando de P a S. Sea $T(x)$ el tiempo (en horas) que tarda Huw en completar el recorrido siguiendo esta ruta.

(i) Muestre que $T(x) = \dfrac{\sqrt{0{,}4^2 + x^2} + 3\sqrt{0{,}8^2 + (4-x)^2}}{15}$. [3]

(ii) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = T(x)$. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

(iii) A partir de lo anterior, determine el valor de x que minimiza $T(x)$. [1]

(iv) Halle en cuánto se reduce el tiempo que tarda Huw en llegar al colegio cuando coge esta ruta óptima, en comparación con el tiempo que tarda cuando va en línea recta de H a S. Dé la respuesta redondeando al número entero de minutos más cercano. [2]

(c) (i) Determine una expresión para la derivada $T'(x)$. [3]

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $T(x)$ se minimiza cuando se cumple que

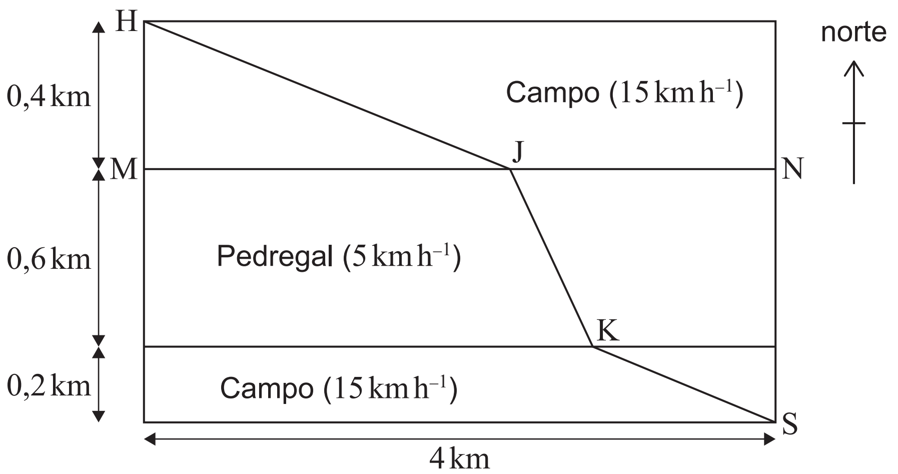
$$\frac{x}{\sqrt{0{,}16+x^2}}=\frac{3(4-x)}{\sqrt{0{,}64+(4-x)^2}}.$$ [1]

(iii) Para la ruta óptima, verifique que la ecuación del apartado (c)(ii) satisface el siguiente resultado:

$$\frac{\cos \mathrm{H\hat{P}M}}{\cos \mathrm{S\hat{P}N}}=\frac{\text{velocidad por el campo}}{\text{velocidad por el pedregal}}.$$ [2]

(d) El propietario del pedregal convierte un cuarto de ese terreno (el que está más al sur) en un campo en el que Huw puede correr a $15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. La siguiente figura muestra la ruta óptima (HJKS) en esta nueva situación. Se sabe además que [HJ] es paralelo a [KS].

la figura no está dibujada a escala



Utilizando un resultado similar al del enunciado del apartado (c)(iii) pero referido al punto J, determine MJ. [6]

2. [Puntuación máxima: 29]

En esta pregunta se aborda el análisis de varios conjuntos de datos correspondientes a puntuaciones de examen, utilizando una diversidad de procedimientos estándar y también una prueba estadística desconocida.

Los ocho alumnos de una clase se presentan a dos exámenes: uno de Francés y otro de Alemán.

Las puntuaciones de estos exámenes se muestran en la **Tabla 1**.

Tabla 1

Alumno	Puntuación de Francés	Puntuación de Alemán
S_1	42	39
S_2	65	66
S_3	82	71
S_4	50	53
S_5	48	32
S_6	73	59
S_7	34	40
S_8	59	56

La puntuación máxima es la misma en los dos exámenes.

Puede suponer que estos datos constituyen una muestra aleatoria procedente de una distribución normal bidimensional de media μ_{F} para el examen de Francés, de media μ_{G} para el examen de Alemán y con un coeficiente de correlación momento-producto de Pearson igual a ρ.

Antes de que se presentaran a los exámenes, Pierre —el Director del Departamento de Lenguas— decidió investigar si existían indicios significativos de que μ_{F} y μ_{G} fueran diferentes. Para ello, decidió analizar los datos utilizando una prueba t de Student de dos colas para muestras pareadas, a un nivel de significación del 5%.

(a) Explique brevemente:

(i) Por qué optó por utilizar una prueba t y no una prueba Z. [1]

(ii) Por qué decidió utilizar una prueba de dos colas y no una prueba de una cola. [1]

(b) (i) Indique hipótesis apropiadas para la prueba t. [1]

(ii) Halle el valor del parámetro p correspondiente a esta prueba. [2]

(iii) El valor del parámetro p es una probabilidad. Indique el suceso para el que da la probabilidad. [1]

(iv) Indique, razonando su respuesta, a qué conclusión debería llegar Pierre. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

(c) Pierre cree que los alumnos que sacan buena nota en el examen de un idioma tienden a sacar buena nota en el examen del otro idioma. Por ello, decide llevar a cabo una prueba, a un nivel de significación del 5%, para investigar si existe una correlación positiva entre las puntuaciones del examen de Francés y las puntuaciones del examen de Alemán.

(i) Indique unas hipótesis en función de ρ que sean apropiadas. [1]

(ii) Realice una prueba adecuada e indique el valor del parámetro p. Indique, en contexto, la conclusión a la que debería llegar Pierre; dé una razón que la justifique. [4]

(d) En realidad hay dos alumnos más en esta clase: son Paul y Sue. Paul se presentó al examen de Francés, pero no se pudo presentar al examen de Alemán. Sue se presentó al examen de Alemán, pero no se pudo presentar al examen de Francés.

(i) En el examen de Francés, Paul obtuvo una puntuación de 58. Utilice los datos de la **Tabla 1** para predecir la puntuación que habría obtenido Paul en el examen de Alemán. [3]

(ii) Basándose en la puntuación que Sue obtuvo en el examen de Alemán, se predijo que en el examen de Francés habría obtenido una puntuación de 71. Halle la puntuación que obtuvo Sue en el examen de Alemán. [2]

Seis alumnos se presentan al examen de Matemáticas y al de Historia. En la **Tabla 2** se muestran las puntuaciones obtenidas. Angela, la subdirectora del colegio, decide investigar si existe (o no) alguna relación entre las puntuaciones que han obtenido en esas dos asignaturas.

Tabla 2

Alumno	Puntuación de Matemáticas (x)	Puntuación de Historia (y)
P_1	53	41
P_2	76	70
P_3	50	62
P_4	65	47
P_5	61	66
P_6	84	50

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

A Angela le informan que, en ambas asignaturas, la puntuación máxima es 100.

Angela cree que posiblemente los datos no sigan una distribución normal, así que se pone a investigar qué pruebas adecuadas están disponibles y donde no haya que suponer que los datos siguen una distribución normal. Decide utilizar una prueba que no conoce y que está basado en un estadístico llamado τ de Kendall.

Considere n observaciones bidimensionales (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots n$, tal que no hay valores de x iguales y tampoco hay valores de y iguales. Un par dado de observaciones bidimensionales (x_i, y_i) y (x_j, y_j) se dice que es concordante si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ y discordante si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$. Para n observaciones bidimensionales, existen $\frac{n(n-1)}{2}$ pares distintos.

Et τ de Kendall se define así: $\frac{2(C-D)}{n(n-1)}$, donde C y D denotan, respectivamente, el número de pares concordantes y de pares discordantes.

(e) (i) Muestre que el valor del τ de Kendall siempre está dentro del intervalo $[-1, +1]$. [1]

(ii) Para los alumnos P_1 y P_2, muestre que el par es concordante. [1]

(iii) Muestre que el valor del τ de Kendall para los datos de Historia y de Matemáticas es igual a $0{,}2$. [4]

(f) Angela decidió utilizar este estadístico en una prueba de dos colas a un nivel de significación del 10%. La región crítica para esta prueba es $|\tau| \geq 0{,}733$.

(i) Indique, con palabras, cuáles son sus hipótesis nula y alternativa. [1]

(ii) Indique la conclusión a la que debería llegar Angela. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

Angela se entera de que las puntuaciones de Historia en realidad son sobre un máximo de 120. El profesor de Historia le aconseja a Angela que escale las puntuaciones de Historia para que sean sobre 100 y que, a continuación, rehaga los cálculos del valor de τ.

(g) Indique si está (o no) de acuerdo con el consejo que le ha dado el profesor de Historia. Dé una razón que lo justifique. [2]

Fuentes: